Goniometrie 3A Gruppe A 24. 1. 2000

Zu allen Aufgaben gehört ein vollständiger Lösungsweg. Eine Taschenrechnerlösung ersetzt einen algebraischen Lösungsweg nicht!

1. Gegeben sind die Schwingungen
   $s_1(t) = 5\cos(4t+30°) + 2\cos(12t + 60°)$
   $s_2(t) = 8\sin(4t + 120°) + 6\sin(12t - 60°)$

   Berechnen Sie $s_3(t) = A\sin(4t + \varphi_A) + B\sin(12t + \varphi_B)$ mit der Eigenschaft, dass $s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) = 0$.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen im Intervall $0° \le \alpha < 360°$
   a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin(\alpha - 30°)$
   b) $\tan(2\alpha) = \tan\alpha$
   c) $\sin\alpha = \cos(2\alpha) - 3\cos^2\alpha$
   d) $16\sin^4(2\alpha) - 8\sin^2(2\alpha) + 1 = 0$

3. a) Beweisen Sie: $\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\cos\delta$
   b) Setzen Sie $\alpha = \gamma+\delta$ und $\beta = \gamma-\delta$ und beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Resultats von a) die Formel $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
   c) Beweisen Sie ebenso die Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. Zwei 440-Hz-Stimmgabeln werden gleich stark und fast gleichzeitig angeschlagen. Sie produzieren die Schwingungen
   $p_1(t) = 200\text{Pa} \cdot \sin(360° \cdot 440\text{Hz} \cdot t)$ und
   $p_2(t) = 200\text{Pa} \cdot \sin(360° \cdot 440\text{Hz} \cdot t + \varphi_2)$
   (Pa ist die Abkürzung für die Druckeinheit Pascal.)

   a) Berechnen Sie die Amplitude der Gesamtschwingung $p_1(t) + p_2(t)$ als Funktion von φ_2. Vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich.
   b) Für welchen Wert von φ_2 löschen sich beide Schwingungen aus (Gesamtamplitude gleich null)? (Für diese Teilaufgabe sollten Sie höchstens eine Zeile rechnen!)

   c) Wie gross wäre in diesem Fall die Zeitdifferenz zwischen beiden Anschlägen?

Goniometrie 3A Gruppe B 24. 1. 2000

Zu allen Aufgaben gehört ein vollständiger Lösungsweg. Eine Taschenrechnerlösung ersetzt einen algebraischen Lösungsweg nicht!

1. Gegeben sind die Schwingungen
   $s_1(t) = 3\cos(2t+90°)$
   $s_2(t) = -3\sin(2t + 240°)$
   $s_3(t) = 6\sin(2t - 60°)$
   Berechnen Sie Amplitude und Phase einer Schwingung $s_4(t)$ mit der Eigenschaft, dass $s_1(t) + s_2(t) = s_3(t) + s_4(t)$.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen im Intervall $0° \leq \alpha < 360°$
   a) $\sin\alpha + \tan\alpha = \sin(2\alpha)$
   b) $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha)$
   c) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan(2\alpha)}$
   d) $\cos^4(3\alpha) - \dfrac{1}{2}\cos^2(3\alpha) + \dfrac{1}{16} = 0$

3. a) Beweisen Sie: $\cos(\gamma+\delta) + \cos(\gamma-\delta) = 2\cos\gamma\cos\delta$
   b) Setzen Sie $\alpha = \gamma+\delta$ und $\beta = \gamma-\delta$ und beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Resultats von a) die Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
   c) Beweisen Sie ebenso die Formel $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4. An zwei Drähten liegen die Spannungen
   $U_1(t) = 230V \cdot \sin(360°\cdot 50Hz\cdot t)$ und
   $U_2(t) = 230V \cdot \sin(360°\cdot 50Hz\cdot t + \varphi_2)$
   an. Die Spannung, welche zwischen beiden Polen abgegriffen werden kann, ist $\Delta U(t) = U_1(t) - U_2(t)$.

   a) Berechnen Sie die Amplitude von $\Delta U(t)$ als Funktion von φ_2. Vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich!
   b) Für welchen Wert von φ_2 wird diese Amplitude maximal? (Für diese Teilaufgabe sollten Sie höchstens eine Zeile rechnen!)
   c) Wie gross ist in diesem Fall die zeitliche Verschiebung von $U_1(t)$ gegenüber $U_2(t)$?

Goniometrie 3A Wiederholungsprüfung 5. 6. 2000

Zu allen Aufgaben gehört ein vollständiger Lösungsweg. Eine Taschenrechnerlösung ersetzt einen algebraischen Lösungsweg nicht!

1. a) Schreiben Sie den Ausdruck
   $\sin(\alpha) + \sin(\alpha + 30°) + \sin(\alpha + 60°) + \sin(\alpha + 90°)$
   in der Form $A \sin(\alpha + \varphi)$, wobei α beliebig ist und A und φ zu berechnen sind.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Resultats von a) alle Lösungen der Gleichung
   $\sin(\alpha) + \sin(\alpha + 30°) + \sin(\alpha + 60°) + \sin(\alpha + 90°) = 0$
   im Intervall Intervall $0° \le \alpha < 360°$. Falls Sie a) nicht lösen können (und nur dann!) rechnen Sie mit $A = 3.4923$ und $\varphi = 13.4934°$.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen im Intervall $0° \le \alpha < 360°$
   a) $5 \cot \frac{\alpha}{2} = 3 \sin \frac{\alpha}{2}$
   b) $13 \sin(2\alpha) + 5\cos(3\alpha) = 0$
   c) $3 \tan(2\alpha) - 8 \sin(4\alpha) = 2 \cos(4\alpha) \tan(2\alpha)$
   d) $6 \tan \alpha = \tan(\alpha + 45°)$

3. Beweisen Sie durch Vereinfachung des Ausdrucks auf der linken Seite:
   a) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin(2\alpha)$
   b) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos(2\alpha)$
   c) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan(2\alpha)$
   Leiten Sie daraus die Rationalisierungsformeln in der Formelsammlung (S. 54 unten) ab!

4. Die drei Phasenpole R, S und T einer Drehstromsteckdose liefern gegenüber dem Nullleiter die Spannungen
   $U_R(t) = 230V \cdot \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t)$ und
   $U_S(t) = 230V \cdot \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t + 120°)$
   $U_T(t) = 230V \cdot \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t + 240°)$
   Ein Motor enthält drei Magnetspulen, die an jeweils 2 Phasen angeschlossen werden. Damit erhalten die Spulen die Spannungen
   $\Delta U_{RS}(t) = U_R(t) - U_S(t)$, $\Delta U_{ST}(t) = U_S(t) - U_T(t)$ und $\Delta U_{TR}(t) = U_T(t) - U_R(t)$.
   a) Schreiben Sie $\Delta U_{RS}(t)$ in der Form $\Delta U_{RS}(t) = U^0_{RS} \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t + \varphi_{RS})$.
   b) Begründen Sie ohne die Rechnung durchzuführen, warum man $U^0_{ST} = U^0_{TR} = U^0_{RS}$, $\varphi_{ST} = \varphi_{RS} + 120°$ und $\varphi_{TR} = \varphi_{RS} + 240°$ erhält, wenn man $\Delta U_{RS}(t)$ in der Form $\Delta U_{RS}(t) = U^0_{RS} \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t + \varphi_{RS})$ und $\Delta U_{TR}(t)$ in der Form $\Delta U_{TR}(t) = U^0_{TR} \sin(360° \cdot 50Hz \cdot t + \varphi_{TR})$ schreibt.
   c) Berechnen Sie $(\Delta U_{RS}(t))^2$. Schreiben Sie das Resultat mit Hilfe der Formel $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$ so um, dass es aus einem konstanten Term und einer harmonischen 100 Hz-Schwingung besteht.