

Prüfungslektion Mathematik

Datum: 6. Mai 1999
Ort: Gymnasium Kirschgarten, Basel, Zi. -105
Klasse: 7B
Zeit: 9.25 bis 10.10 Uhr
Kandidat: Michael Weiss
Examinator: Dr. Urs Müller
Experte: Karl Baumgartner
Methodiklehrkraft: Andreas Stahel
Thema: Einführung in die Kegelschnitte

Fachlicher Hintergrund

Man erhält den Mantel eines geraden Kreiskegels, indem man eine Gerade um eine die Gerade schneidende Achse rotieren lässt und die dabei von der Geraden überstrichene Fläche betrachtet. Dabei muss betont werden, dass der so definierte Kreiskegel eigentlich ein Doppelkegel ist, der zu seiner Spitze punktsymmetrisch ist.

Als Kegelschnitt bezeichnet man die Schnittmenge eines derart erzeugten Kegelmantels mit einer Ebene. Die Schnittmenge hat die Form eines Punktes, einer Gerade, einer Doppelgerade, eines Kreises, einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel. Die ersten drei Fälle entstehen, wenn die Schnittebene durch die Kegelspitze geht, und werden als entartet bezeichnet. Ein Spezialfall liegt ebenfalls vor, wenn Kegelachse und Schnittebene senkrecht zueinander stehen. Ich betrachte im folgenden nur die übrigen Fälle (Ellipse, Parabel, Hyperbel).

Meine Bezeichnungen orientieren sich an der Formelsammlung "Formeln und Tafeln", die von der Klasse benutzt wird:

Die Schnittgleichung folgt aus den Identitäten $h = \overline{PQ} \cos \alpha = \overline{Pl} \sin \beta$ und $\overline{PQ} = \overline{PF}$, die man unmittelbar aus der obigen Figur ablesen kann. Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, erhält man

$$\overline{PF} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \overline{Pl} \quad (1)$$

Alle Punkte der Schnittmenge liegen in einer Ebene und sind charakterisiert durch die Proportionalität der Abstände zum Punkt F (*Brennpunkt*) und zur Gerade l (*Leitgerade*). Die Proportionalitätskonstante $\varepsilon = \sin \beta / \cos \alpha$ hängt vom Öffnungswinkel α des Kegels und vom Neigungswinkel β der Ebene relativ zum Kegel ab und wird *numerische Exzentrizität* genannt. Die Form der Schnittkurve (Ellipse, Hyperbel oder Parabel) wird durch ε bestimmt: Für $\varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse, für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel. Die Grösse der Schnittfigur ist proportional zum Querschnitt p .

Didaktische Überlegungen

Geometrische Themen sollen mit geometrischen Mitteln behandelt werden – diese Maxime halte ich auch in einer C-Klasse im 11. Schuljahr noch für angebracht. Das bedeutet:

- Weitgehender Verzicht auf algebraische Umformungen
- Darstellung der Schnittgleichung in einer geometrisch anschaulichen Form.

Die oben (sehr verkürzt) dargestellte Herleitung mit Gleichung (1) als Resultat erfüllt beide Bedingungen. Sie baut ausserdem auf sehr wenigen Voraussetzungen auf, nämlich:

- Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
- elementares Wissen über Tangentenabschnitte

Gegenüber einer algebraisch-formalen Behandlung hat die geometrische Herleitung allerdings den Nachteil, dass das Resultat (1) in den entarteten Fällen (Gerade, Doppelgerade, Punkt) sowie für den Kreis nicht gilt. Da Formeln in der Schule ihre Glaubwürdigkeit zu einem Teil auch daraus gewinnen, dass man sie an einfachen Fällen verifiziert, ist das ein nicht zu unterschätzender Nachteil. Problematisch ist insbesondere das Versagen von Gleichung (1) für $\beta = 0$, also einen kreisförmigen Schnitt. Es muss speziell darauf hingewiesen werden, was in diesem Grenzfall mit der Leitgeraden passiert.

Zur Methodik

Obwohl die Herleitung der Schnittgleichung wie gezeigt auf wenigen Voraussetzungen basiert, stellt sie einige Anforderungen an Konzentration und räumliches Vorstellungsvermögen. Um diese Schwierigkeiten möglichst gering zu halten, gehe ich folgendermassen vor:

- Ich beginne mit einer geometrischen Konzentrationsübung, in welcher wir uns den Kegel und die Schnitte mit der Ebene zunächst nur in Gedanken vorstellen. Dabei lege ich Wert auf einen *dynamischen* Prozess: Der Kegel entsteht durch *Rotation* einer Geraden um die *z*-Achse¹, und die verschiedenen Schnitte entstehen, indem wir zunächst eine horizontale Ebene durch die Kegelspitze legen, und diese dann nach unten *verschieben* und immer weiter *kippen*.
- Sobald die Schnitte in Gedanken vorstellbar werden, unterstütze ich die Vorstellung mit Modellen.
- Die geometrischen Konstruktionen zeige ich in einer skizzierten Schrägbilddarstellung und lasse parallel (an der anderen Tafel) einzelne Schülerinnen und Schüler die gleiche Konstruktion im Aufriss zeichnen. Dadurch wird die Anschaulichkeit verbessert, und gleichzeitig erhalte ich laufend eine Kontrolle darüber, ob mir die Klasse noch folgen kann.

Nach dieser doch recht lehrerzentrierten Herleitung ist eine Einzelarbeit für den Rest der Stunde vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann bereits bekanntes, nämlich die Gleichung der Parabel, als Spezialfall der Kegelschnittgleichung wiederentdecken.

Lektionsziele

- Sich Kegelschnitte vorstellen können, die verschiedenen Schnittformen kennen.
- Gemeinsames Erarbeiten der Schnittgleichung (1) (Ich erwarte, dass die Schülerinnen und Schüler die gezeigte Herleitung selbst wiederholen können).
- Selbst erarbeiten, wie die Schnittgleichung (1) in eine Koordinatengleichung in der Ebene *E* verwandelt werden kann.

¹ Die Bezugnahme auf ein Koordinatensystem wäre nicht nötig, erleichtert aber die *begriffliche* Formulierung stark.

Zeitlicher Ablauf

Inhalt der Sequenz	Dauer	Schüleraktivität	Lehreraktivität	Material
Geometrische Vorstellungsübung	5'	denken	entwickeln	Kegelmodelle
Schnittgleichung herleiten	25' – 30'	mitschreiben, an der Tafel mitarbeiten	an der Tafel entwickeln	Tafel, weisse und farbige Kreide, Lineal, Zirkel, Kugel und gefalteter Kartonstreifen
Parabelgleichung als Spezialfall der Kegelschnittgleichung herleiten	10'	Auftrag entgegennehmen, lösen	Aufgabenstellung erklären	Folie, Hellraumprojektor
Mit den Hausaufgaben beginnen	Puffer	Auftrag entgegennehmen, lösen	Aufgabenstellung erklären	Tafel, Folie, Hellraumprojektor