

Mechanik der Flüssigkeiten und Gase (Hydromechanik und Aeromechanik)

Die Dichte

Die Dichte ρ eines Stoffes ist das Verhältnis zwischen Masse m und Volumen V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Die Einheit der Dichte ist $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Man misst die Dichte, indem man Masse und Volumen misst.

Die Masse einer Flüssigkeit misst man mit Hilfe eines Gefäßes, dessen Masse bekannt ist. Die Masse eines Gases bei normalem Luftdruck misst man so: Man pumpt ein Gefäß luftleer und bestimmt seine Masse. Dann füllt man soviel Gas in das Gefäß, dass innen ein Überdruck herrscht und öffnet das Gefäß dann kurz, um den Druck auszugleichen. Wegen dem Überdruck im Innern strömt dabei nur Gas aus, aber keine Luft in das Gefäß. Man kann nun die Masse des Gefäßes (inkl. Gas) mit der Masse des leeren Gefäßes vergleichen und erhält die Masse des Gases.

Die potentielle Energie einer Flüssigkeit oder eines Gases

Um die potentielle Energie einer bestimmten Menge Flüssigkeit oder Gas zu bestimmen, muss man rein prinzipiell die potentielle Energie jedes Moleküls bestimmen, und dann diese Energien addieren. Häufig kommt man aber mit einfachen Durchschnittsrechnungen weiter.

Befindet sich die Flüssigkeit oder das Gas in einem Behälter der Höhe h mit rechteckigem Querschnitt, so befinden sich die Moleküle im Mittel auf der Höhe $h/2$, und die potentielle Energie der ganzen Flüssigkeit / des ganzen Gases im Behälter ist

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} mgh$$

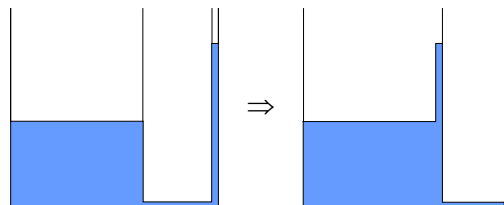
wobei m die Masse der ganzen Flüssigkeit / des ganzen Gases ist.



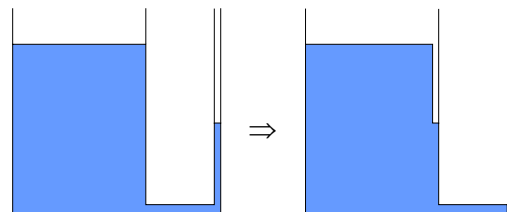
Das hydrostatische Paradoxon

Es wird von vielen Menschen als paradox empfunden, dass eine stehende Flüssigkeit in gekoppelten Gefäßen überall bis zur gleichen Höhe steigt. Daher heisst diese Tatsache hydrostatisches Paradoxon. Der Grund für dieses Verhalten ist das Prinzip minimaler Energie: Die potentielle Energie der Flüssigkeit ist dann am geringsten, wenn sie überall gleich hoch steht. Bei gekoppelten Gefäßen lässt sich das zeigen, indem man sie umbaut, ohne die potentielle Energie der enthaltenen Flüssigkeit zu verändern.

In der Skizze rechts kann man durch so einen Umbau erkennen, dass die potentielle Energie der Flüssigkeit nicht minimal ist, wenn sie im dünnen Rohr rechts höher steht als im Hauptteil des Gefäßes: Nach dem Umbau ist offensichtlich, dass der Pegelunterschied nicht stabil sein kann.



In dieser Skizze erkennt man, dass auch dann die potentielle Energie nicht minimal ist, wenn die Flüssigkeit im dünnen Rohr niedriger steht als im Hauptteil des Gefäßes: Nach dem Umbau ist es klar, dass sich der Pegelunterschied nicht halten kann.



Der Druck in einer Flüssigkeit

Zwei zylinderförmige Kolben, die über eine Flüssigkeit gekoppelt sind, wirken als Kraftverstärker. Die Kraftverstärkung entspricht dem Verhältnis der Strecken, entlang derer die Kolben bewegt werden: $F_1 s_1 = F_2 s_2$. An beiden Kolben wird also die gleiche Arbeit geleistet.

Üblicherweise redet man im Zusammenhang mit Flüssigkeiten allerdings nicht von gleicher Arbeit, sondern von gleichem Druck. Unter Druck versteht man das Verhältnis zwischen der Kraft F und der Fläche A , auf die sich die Kraft verteilt:

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}$$

Das Symbol p steht für *pressure*. Die Einheit des Drucks ist das Pascal (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Die anliegende Kraft hat praktisch keinen Einfluss auf das Volumen der Flüssigkeit. Daher ist das Flüssigkeitsvolumen V_1 , das beim Verschieben in einen Kolben verschwindet, gleich gross wie das Volumen V_2 , das im anderen Kolben entsteht. Daher nennen wir beide Volumina einfach V .

Wenn wir die Querschnittsflächen der beiden Kolben A_1 und A_2 nennen, können wir die Volumina mit den Strecken s_1 und s_2 in Beziehung setzen. Es gilt nämlich

$$V = V_1 = A_1 s_1 \text{ und } V = V_2 = A_2 s_2$$

weil das Volumen eines Zylinders gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und seiner Höhe ist.

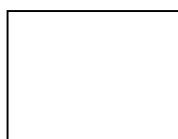
Aus diesen Gleichungen folgt

$$s_1 = \frac{V}{A_1} \text{ und } s_2 = \frac{V}{A_2}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $F_1 s_1 = F_2 s_2$ ein, so erhält man

$$F_1 \frac{V}{A_1} = F_2 \frac{V}{A_2}$$

oder, nach Division durch V ,



$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Diese Gleichung sagt, dass der *Druck* an beiden Kolben gleich gross ist:

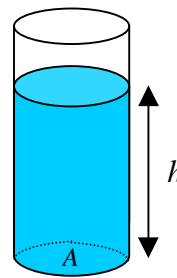
$$p_1 = p_2$$

Für die Flüssigkeit ist es allerdings egal, ob ein Teil der Gefässwand zu einem Kolben gehört oder nicht. Daraus lässt sich schliessen, dass der Druck nicht nur an beiden Kolben gleich gross sein muss, sondern überall in der Flüssigkeit. Wie wir gleich sehen werden, stimmt das aber nur, wenn die Schwerkraft der Flüssigkeit keine Rolle spielt.

Der Schweredruck einer Flüssigkeit

Auf dem Boden eines zylinderförmigen Gefässes mit Grundfläche A , das bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt ist, wirkt die Gewichtskraft $G = mg$. Die Masse der Flüssigkeit m ist gleich dem Produkt von Dichte und Volumen:

$$m = \rho V$$



Das Volumen wiederum ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe, also $V = Ah$. Zusammengekommen gilt also

$$G = mg = \rho Vg = \rho Ahg$$

Teilt man die Gewichtskraft G durch die Fläche A , erhält man den Schweredruck:

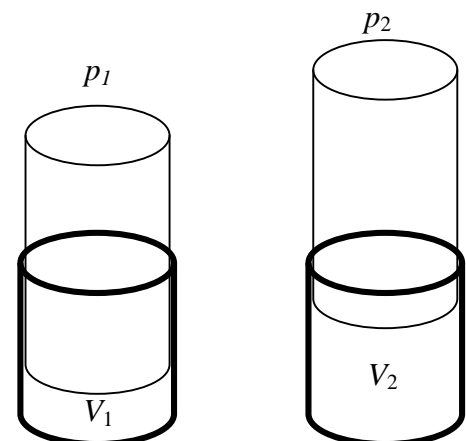
$$p = \frac{G}{A} = \rho gh$$

Der Schweredruck ist also der Druck, den die Flüssigkeit aufgrund ihrer eigenen Schwerkraft erzeugt. Bemerkenswerterweise hängt der Schweredruck nicht von der Form des Gefässes ab, was wiederum auf das hydrostatische Paradoxon führt!

Der Druck eines Gases

Wie bei einer Flüssigkeit ist auch im Innern eines mit Gas gefüllten Behälters der Druck überall gleich gross. Im Gegensatz zu einer Flüssigkeit lässt sich ein Gas jedoch relativ leicht komprimieren: Je mehr Druck man auf einen mit Gas gefüllten Kolben ausübt, umso geringer wird das Volumen, welches das Gas einnimmt. Es gilt also

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$



oder anders gesagt: $pV = \text{const.}$ Diese Gleichung wird *Gesetz von Boyle-Mariotte* genannt. Sie gilt nur, wenn sich das Gas bei der Kompression nicht erhitzt.

Der Luftdruck

Bei der Herleitung der Formel $p = \rho gh$ für den Schweredruck einer Flüssigkeit haben wir ohne es zu sagen angenommen, dass die Dichte der Flüssigkeit im ganzen Behälter gleich ist. Das stimmt darum, weil Flüssigkeiten unter ihrem eigenen Gewicht nicht komprimiert werden. Bei Gasen, die der Schwerkraft ausgesetzt sind, und damit auch in der Atmosphäre, ist das anders. Die höheren Luftschichten drücken mit ihrem Gewicht auf die unteren. Die Luft ist daher auf Meereshöhe dichter als in den Bergen.

Aus diesem Grund ist der Luftdruck nicht proportional zur Höhe der Luft, die sich darüber befindet, sondern es gilt ein anderer Zusammenhang, den wir nicht herleiten können. Er lautet:

$$p = p_0 \cdot 2^{-\frac{h}{h_{1/2}}}$$

In dieser Formel ist h die Höhe über Meer, auf der man den Luftdruck berechnen will, $p_0 = 101300 \text{ Pa}$ ist der mittlere Luftdruck auf Meereshöhe und $h_{1/2} = 5500 \text{ m}$ ist diejenige Höhe, auf der der Luftdruck nur noch halb so gross ist wie auf Meereshöhe. Die Formel sagt, dass sich der Luftdruck etwa alle 5500 m halbiert. Die Formel stimmt allerdings nicht ganz genau, weil die Temperatur der Luft mit zunehmender Höhe abnimmt und die Masse der Erdkugel nicht ganz gleichmässig verteilt ist (Gebirge, flaches Land, Meer). In den Bergen ist der Luftdruck wegen der Gravitationskraft des Gebirges etwas höher, als es die Formel erwarten lassen würde. Zudem schwankt der Luftdruck mit dem Wetter. Bei extremen Wetterlagen kann er bis zu 10% vom Mittelwert abweichen.

Der Auftrieb

Taucht man einen Körper in eine Flüssigkeit ein, so beobachtet man eine Kraft, die der Gewichtskraft entgegenwirkt. Sie wird Auftriebskraft genannt. Sie entsteht, weil auf die Unterseite des Körpers ein höherer Druck wirkt als auf die Oberseite. Falls der Körper die gleiche Dichte wie die Flüssigkeit besitzt, (z.B. ein dünnes Gefäss, das mit der Flüssigkeit gefüllt ist), heben sich Auftriebskraft und Gewichtskraft gerade auf. Daher gilt:

Die Auftriebskraft eines Körpers in einer Flüssigkeit ist entgegengesetzt gleich gross wie die Gewichtskraft der Flüssigkeitsmenge, die das Volumen des Körpers einnimmt.

Da diese Flüssigkeitsmenge quasi durch den Körper verdrängt wird, formuliert man diesen Sachverhalt auch oft so:

Die Auftriebskraft eines Körpers in einer Flüssigkeit ist entgegengesetzt gleich gross wie die Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

Als Formel:

$$F_{\text{Auftrieb}} = m_{\text{verdrängte Flüssigkeit}} \cdot g = \rho_{\text{Flüssigkeit}} \cdot V_{\text{Körper}} \cdot g$$