

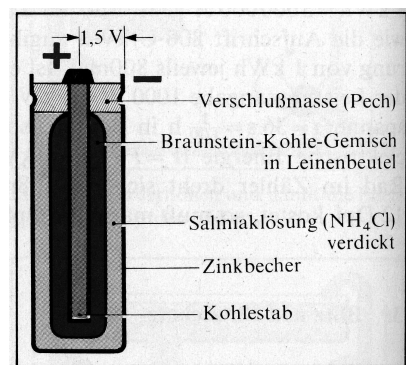
Strom, Spannung, Leistung, Widerstand: Anwendungen und Aufgaben

1. **Geschwindigkeit der Leitungselektronen.** Die elektrische Leitfähigkeit in Metallen stammt von den Elektronen der äussersten Hülle, welche als einzige nicht fest an ein Atom gebunden sind, sondern sich innerhalb des Metalls frei bewegen können. Die Anzahl der Elektronen, welche zur Leitfähigkeit beitragen, lässt sich an der Stellung im Periodensystem ablesen. Eine grosse Zahl von Leitungselektronen (pro Atom) lässt nicht auf eine bessere Leitfähigkeit schliessen, wie man am Beispiel von Kupfer erkennt, das nur ein Leitungselektron pro Atom besitzt.

Aus der Anzahl Elektronen, die an der Leitung beteiligt sind, lässt sich abschätzen, wie schnell die Elektronen in einem Leiter fliessen. Wir denken uns einen Kupferdraht von 1mm^2 Querschnitt, der von 1 A Strom durchflossen sein soll.

- a) Die Ladung eines Elektrons beträgt $-1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$, die molare Masse von Kupfer ist 0.0635 kg/mol , die Avogadro-Konstante ist $6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen pro Mol, die Dichte von Kupfer ist 8920 kg / m^3 . Berechnen Sie aus diesen Angaben die Höhe eines Kupferzylinders mit 1 mm^2 Grundfläche, der -1 C Leitungselektronen enthält. Daraus lässt sich die Geschwindigkeit dieser Elektronen bei 1 A Stromstärke berechnen.
- b) Vergleichen Sie diese Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit, die von der ungeordneten thermischen Bewegung der Elektronen herrührt: Es gilt $E = \frac{3}{2}kT$, wobei $k = 1.386 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$. Die Masse eines Elektrons ist $9.1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$.

2. **Batterie.** Die nebenstehende Abbildung zeigt den Aufbau einer herkömmlichen Zink-Kohle-Batterie (so genannte Trockenzelle: Die Salmiaklösung wird mit Klebstoff verdickt, was zwar die Ionenleitung nicht beeinträchtigt, aber das Auslaufen der Batterie erschwert). Aus dem Zinkbecher (der zum Schutz noch von einem Blechmantel umgeben wird, der hier nicht dargestellt ist), wandern Zink-Ionen (Zn^{2+}) in die Lösung, wo sie mit dem Chlor des Salmiaks zu Zinkchlorid reagieren. Dabei bleiben pro Ion zwei Elektronen im Zinkbecher zurück.



Durch die Ladungstrennung steigt die Spannung in der Zelle auf 1.66 V an, danach können keine weiteren Zink-Ionen mehr gelöst werden, weil die Arbeit für weitere Ladungstrennung zu gross wäre. Erst wenn die Pole zu einem Stromkreis verbunden werden (was die Spannung je nach Stromfluss mehr oder weniger stark absenkt), können weitere Ionen in die Lösung wandern und weitere Ladungen getrennt werden. Die Batterie ist verbraucht, wenn sich alles Zink aufgelöst hat.

- a) Berechnen Sie die Energie, welche bei der Trennung von 1 mol Zink frei wird.
- b) Wie hängen die Energie der Batterie und die Masse des in ihr enthaltenen Zinks zusammen? Die molare Masse von Zink ist 0.0654 kg / mol .
3. **Spezifischer Widerstand.** Ein 1 m langer Draht aus Kupfer mit einem Querschnitt von 1 mm^2 hat einen Widerstand von $1.68 \cdot 10^{-2}\ \Omega$.
- a) Welchen Widerstand hat ein 5 km langer Kupferdraht von 10 mm^2 Durchmesser?
- b) In welcher Beziehung stehen
- Widerstand und Querschnittsfläche?
 - Widerstand und Länge?
- c) Der spezifische Widerstand ρ eines Drahts ist so definiert:

$$\rho = R \cdot \frac{A}{\ell}$$

Hierbei ist R der (normale) Widerstand, A die Querschnittsfläche und ℓ die Länge des Drahts. Welche Einheit hat ρ ? Welchen Vorteil hat die Grösse ρ gegenüber R ?

4. **Vorwiderstand.** Elektrische Geräte mit geringer Leistung werden häufig so konzipiert, dass sie mit 115 V oder mit 230 V betrieben werden können, so dass man sie in Amerika und in Europa verwenden kann. Das ist z.B. bei Rasierapparaten oder Batterieaufladegeräten recht praktisch.

Bei diesen Geräten kann man mit einem Schalter die gewünschte Netzspannung einstellen. In der Schalterstellung für 230 V wird ein zusätzlicher Widerstand (so genannter Vorwiderstand) seriell in den Stromkreis geschaltet, der dafür sorgt, dass das Gerät trotzdem nur 115 V Spannung bekommt.

- Wie gross muss dieser Widerstand bei einem 10W-Rasierapparat sein?
- Wieviel Leistung verbraucht der Vorwiderstand allein?
- Könnte man den gleichen Vorwiderstand auch für ein 20W-Gerät benutzen?

5. **Innenwiderstand.** Die Spannung, die bei einer Batterie angegeben wird, lässt sich nur dann messen, wenn praktisch kein Strom zwischen den Polen fliesst. Man nennt diese Spannung daher auch die Leerlaufspannung (Symbol U_0). Wenn man den Widerstand zwischen den Polen einer Batterie immer mehr verringert, steigt der Strom immer mehr an und die Spannung sinkt ab. Bei $U = 0$ fliesst der maximale Strom I_K (so genannter Kurzschlussstrom). Dieser hängt davon ab, wie gross die Leistungsfähigkeit des Ladungstrenners ist.

Rechnerisch lässt sich dieses Phänomen dadurch in den Griff bekommen, dass man der Batterie einen inneren Widerstand R_i zuschreibt, welcher mit dem gesamten äusseren Widerstand R_a in Serie geschaltet ist. Die Leerlaufspannung setzt sich dann aus der inneren und der äusseren Spannung, U_i und U_a zusammen:

$$U_0 = U_i + U_a$$

Wie bei jedem anderen Widerstand auch gilt dann $U_i = R_i I$ und $U_a = R_a I$.

Welche äussere Spannung bleibt einer 4.5V-Batterie mit Innenwiderstand 1Ω , wenn der Aussenwiderstand 10Ω beträgt?

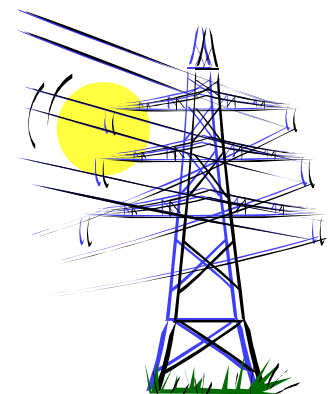
6. **Regelwiderstand.** Eine Lautsprecherbox hat einen Widerstand von 6Ω . Ein 200W-Verstärker liefert der Box maximal 100W. Um die Lautstärke zu regeln, wird ein veränderbarer Widerstand in den Verstärker eingebaut (der mit dem Lautstärkeknopf verstellt wird). Es soll ein Regelwiderstand zur Verfügung stehen, der zwischen 0.5Ω und 1000Ω eingestellt werden kann. Welche Leistung kann auf die Box übertragen werden, wenn der Widerstand

- parallel zur Box
- seriell mit der Box geschaltet wird?



7. **Hochspannungsleitung.** Eine 60 km lange Stromleitung habe einen Widerstand von 15Ω . Das Elektrizitätswerk produziere 10 MW elektrische Leistung. Welcher Anteil davon kommt beim Verbraucher an, wenn die Spannung, die beim E-Werk auf die Leitung gelegt wird

- 380'000 V
 - 15'000 V
 - 230 V
- beträgt?



Lösungshilfen I

1. a) Wenn 1 A Strom fließt, heisst das, dass in einer Sekunde 1 C Ladung durch den Querschnitt des Leiters fließt (im Falle von Elektronen ist es -1 C Ladung¹). Zerlegen Sie die Aufgabe in folgende Schritte:
 - Wieviel Volumen nimmt diejenige Menge Kupfer ein, bei der sich die Gesamtladung der Leitungselektronen auf -1 C addiert?
 - Wenn dieses Volumen die Form eines Zylinders mit der Grundfläche 1 mm^2 haben soll, wie hoch ist dann dieser Zylinder?
 - Wenn die Elektronen dieses Zylinder in einer Sekunde den Leiterquerschnitt durchfließen, wie schnell müssen sie sich dann bewegen?b) Auf die Geschwindigkeit kommt man, indem man die Energie nach der gegebenen Formel berechnet und dann den allgemein gültigen Ausdruck für die kinetische Energie benutzt. Rechnen Sie mit einer Temperatur von 300K.

2. a) Stellen Sie sicher, dass Sie sich gut an die Definition der elektrischen Spannung erinnern. Wieviel Arbeit wird pro Zink-Ion für die Trennung von 2 Elektronen gebraucht?
b) Es geht hier darum, eine Formel aufzustellen, nicht darum, einen Zahlenwert auszurechnen! In Teil a) haben Sie schon Vorarbeit geleistet: Sie wissen, wie viel Energie in einem Mol Zink enthalten ist. Rechnen Sie nun aus, wie viel Energie in der Masse m (sozusagen m Kilogramm) enthalten ist.

3. a) Ein 5 km langer Draht besteht aus 5000 Stücken von je 1 m Länge mit einem Widerstand von je $1.68 \cdot 10^{-2} \Omega$. Diese Stücke sind in Serie geschaltet. Eine analoge Überlegung führt Sie darauf, wie Sie mit den 10 mm^2 Querschnittsfläche (an Stelle von 1 mm^2) umgehen können.
b) Überlegen Sie sich: Wie ändert sich der Widerstand, wenn die Querschnittsfläche verdoppelt wird, wie, wenn die Länge verdoppelt wird?
c) Warum macht es keinen Sinn, Tabellen anzulegen, in denen der Widerstand R gemessen wird?

4. a) Zeichnen Sie ein Bild des Stromkreises mit 2 Widerständen R_1 und R_2 : R_2 für den Rasierapparat (dieser Widerstand lässt sich einfach berechnen!), R_1 für den vorerst unbekanntem Vorwiderstand. Gehen Sie dann schrittweise vor:
 - Welcher Strom muss fließen, damit der Rasierapparat 10 W erhält?
 - Wie gross muss der gesamte Widerstand sein, damit bei 230 V gerade so viel Strom fließt?
 - Wie gross ist dann R_1 ?b) Formelsammlung!
c) Überlegen Sie sich, wie die Rechnung herausgekommen wäre, wenn Sie in Teil a) von einem 20W-Widerstand ausgegangen wären!

5. Da man mit dem inneren Widerstand rechnen kann, wie mit jedem anderen Widerstand auch, können Sie so tun, als handle es sich bei der Batterie um ein Gerät, das konstant 4.5 V liefert, bei dem aber an einem Pol ein Widerstand von 1Ω hängt. Dann bleibt nur noch die Frage, wie sich die Spannung von 4.5 V auf die beiden Widerstände aufteilt.

6. Rechnen Sie zunächst bei a) und bei b) den gesamten Widerstand aus (das gibt dann 4 Rechnungen, weil Sie jeweils die Extremfälle 0.5Ω und 1000Ω für den Regelwiderstand zu berücksichtigen haben: Am besten rechnen Sie nur formal!). Überlegen Sie sich dann, ob der Strom durch beide Widerstände gleich ist, oder die Spannung über beiden Widerständen: Das ist dann nämlich die leicht zu berechnende Grösse. Für den Rest siehe Rückseite!

7. Beachten Sie, dass das E-Werk nicht nach Lust und Laune 10 MW auf die Leitung legen kann, sondern dass es sich genau nach dem Bedarf richten muss. D.h.: Der Gesamtwiderstand steht durch die Angabe der Spannung und der Leistung bereits fest, und kann auch gleich berechnet werden. Wenn Sie dann auch noch die Stromstärke berechnen, sind Sie schon fast fertig.

¹ Man könnte sich fragen, ob -1 C in 1 s überhaupt einen Strom von -1 A ergeben kann, oder ob man nicht konsequenterweise von -1 A sprechen müsste. Die Antwort ist so: Welche Stromrichtung positiv ist, ist Definitionssache. Man kann definieren, dass der Strom positiv ist, wenn in einem Leiter positive Ladungen vom linken Pol des Amperemeters zum rechten Pol fließen. Dann ist der Strom aber auch dann positiv, wenn negative Ladungen vom rechten Pol zum linken Pol fließen, denn das Gerät würde in beiden Fällen das gleich anzeigen. Allerdings ist der erste Fall unrealistisch, weil durch die Drähte des Geräts nur die negativ geladenen Elektronen hindurchfließen können.

Lösungshilfen II

- Sei $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, n die Anzahl Leitungselektronen (= Anzahl Atome), $q = -1\text{C}$, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $M = 0.0635 \text{ kg/mol}$ und $\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$, N die Anzahl Atome in der gesuchten Kupfermenge, m deren (gesamte) Masse und V ihr Volumen. Dann ist $-ne = q$, $M/N_A = m/n$ (Proportion!), und $m = \rho V$. Rechnen Sie in dieser Reihenfolge die jeweils unbekannte Grösse der Gleichung aus, dann kommen Sie auf das gesuchte Volumen. Sei nun A die Fläche und h die Höhe des Zylinders, dann ist $V = Ah$. Dieser Zylinder geht in $\Delta t = 1\text{s}$ durch den Querschnitt, also ist $v = h / \Delta t$.
 - $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT$!
- $\Delta E = U_{AB} \cdot \Delta q$ (vgl. Formelsammlung!). Die Ladung Δq ist pro Ion gleich $2e = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, die Spannung 1.66V . Jetzt noch von 1 Ion auf 1 mol Ionen umrechnen!
 - Sei $M = 0.0654 \text{ kg/mol}$, E_1 die Energie pro kg und E_2 die (in a berechnete) Energie pro mol. Dann ist $E_1 : E_2 = 1 \text{ kg} : M$.
- Durch die 5000fache Länge wird der Widerstand einerseits 5000mal grösser, durch die 10fache Dicke 10mal kleiner. Also wird er insgesamt $5000 : 10$ mal grösser.
 - Im einen Fall liegt eine direkte Proportion vor, im anderen Fall eine indirekte.
 - Zur Einheit: R in Ohm (Ω), A in m^2 , ℓ in m . Einsetzen und kürzen!
- Wir definieren 3 Punkte: A und C an den Polen, B zwischen den Widerständen, R_1 zwischen A und B, R_2 zwischen B und C. Berechnung von I mit $P_{BC} = U_{BC}I$. Berechnung von R_2 mit $P_{BC} = U_{BC}^2 / R_2$ oder mit $U_{BC} = R_2I$. Der gesamte Widerstand ist $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$. Berechnung mittels $R_{\text{ges}} = U_{AC} / I$. Daraus $R_1 = R_{\text{ges}} - R_2$.
 - $P_{AB} = R_{AB}^2 I$.
 - Gleiche Rechnung wie bei a), nur mit anderem R_{BC} .
- Wieder werden 3 Punkte gleich wie in Aufgabe 4 definiert. Jetzt ist R_{AB} der innere Widerstand R_i , R_{BC} ist der äussere Widerstand R_{BC} . Da beide Widerstände in Serie geschaltet sind, ist der Strom überall gleich, also $I = U_{AC} / R_{AC} = U_{AC} / (R_{AB} + R_{BC})$, wobei $U_{AC} = 4.5 \text{ V}$. Für die äussere Spannung gilt $U_{BC} = R_{BC}I$.
- Wir nennen den Regelwiderstand R_1 , den Widerstand der Box R_2 . Wir definieren 4 Punkte: A und B unmittelbar vor und nach R_1 , C und D unmittelbar vor und nach R_2 . I_1 sei der Strom durch R_1 , I_2 derjenige durch R_2 . Wegen der Parallelität der Schaltungen ist $U_{AB} = U_{CD} = U_{\text{ges}}$. Durch Umformen erhält man U_{ges} aus der Formel $P_{\text{ges}} = U_{\text{ges}}^2 / R_{\text{ges}}$, wobei wegen der Parallelität der Widerstände $1/R_{\text{ges}} = 1/R_1 + 1/R_2$ ist. Die Leistung, welche die Box erhält, ist dann $P_{BC} = U_{BC}^2 / R_2$. Es lohnt sich, die ganze Rechnung formal durchzuführen, da ein recht einfaches Resultat herauskommt (insb. ist der Vergleich mit 6b interessant!).
 - Gleiche Rechnung wie bei 5, ausser dass am Schluss nicht die Spannung $U_{BC} = R_2I$, sondern die Leistung $P_{BC} = R_2I^2$ zu berechnen ist (Der Regelwiderstand übernimmt im Vergleich zu Aufgabe 5 die Rolle des inneren Widerstands, die Box die Rolle des Aussenwiderstands).
- Wieder hat man 2 Widerstände in Serie, den der Leitung ($R_1 = 15 \Omega$ zwischen A und B) und den des Verbrauchers (R_2 zwischen B und C, vorläufig unbekannt). Die Spannung des E-Werks ist U_{AC} , seine Leistung ist P_{AC} , der gesamte Widerstand R_{ges} kann aus der Gleichung $P_{AC} = U_{AC}^2 / R_{\text{ges}}$ berechnet werden. Wegen der seriellen Schaltung ist $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$, daraus erhält man R_2 . Der Strom ist $I = P_{AC} / U_{AC}$, die Leistung beim Verbraucher ist $P_{BC} = R_2I^2$. Wieder ist es empfehlenswert, bis zum Schluss keine Zahlen einzusetzen.

Ergebnisse

- $7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 2.7 \text{ cm/h}$.
 - $117'000 \text{ m/s}$
- 230 kJ .
 - $E = eN_AUm/M$
- 8.4Ω .
 - R und A sind ind. prop., R und ℓ sind dir. prop.
 - ρ ist eine Materialkonstante, R nicht.
- 1322.5Ω .
 - 10 W .
 - Nein, es bräuchte nur einen halb so grossen Widerstand.
- 4.1 V .
- 7.7 W bis 99.4 W .
 - 0.6 W bis 92.3 W .
 - 99.9%
 - $1/3$
 - unmöglich